I-spread の空間の無限小変形、(I).

叶　　長 太 郎

北海道学藝大学函館分校数学研究室

Chotaro KANO: On The Infinitesimal Transfomation of the I-Spread Space. (I).

§1 W. Slebodzinski の論文 : Sur deux connexions généralisées の記法によつて path 系 :

$$\frac{d^2x^t}{du^2}+2\Gamma^t\left(x^i,\frac{dx^i}{du}\right)=0 \qquad (1)$$

$$(i=1,2,3,\cdots n)$$

を許容する空間の one parameter 群の變換

$$(A) \qquad \bar{x}^i=x^i+\xi^i(x)\delta t$$

に関する變形理論を考へる。

今

$$y^i=\frac{dx^i}{du}$$

$$\Gamma^\mu_\lambda=\frac{\partial\Gamma^\mu}{\partial y^\lambda}, \quad \Gamma^\mu_{\lambda\kappa}=\frac{\partial^2\Gamma^\mu}{\partial y^\kappa\partial y^\lambda}=\Gamma^\mu_{\kappa\lambda} \qquad (2)$$

とおき、變換 :

$$\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^1,\cdots\cdots,x^n) \qquad (3)$$

を行へば

$$\frac{\partial\bar{y}^\mu}{\partial y^\lambda}=\frac{\partial\bar{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\bar{x}^\mu}{\partial x^\lambda}\bar{\Gamma}^\mu_\rho=\frac{\partial\bar{x}^\mu}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_\lambda-\frac{\partial^2\bar{x}^\mu}{\partial y^\lambda\partial x^\rho}y^\rho \qquad (5)$$

$$\frac{\partial\bar{x}^\rho}{\partial x^\kappa}\frac{\partial\bar{x}^\rho}{\partial x^\lambda}\bar{\Gamma}^\sigma_{\rho\sigma}=\frac{\partial\bar{x}^\mu}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\kappa\lambda}-\frac{\partial^2\bar{x}^\mu}{\partial x^\kappa\partial x^\lambda} \qquad (6)$$

なる関係を得る。但し parameter u は (3) に関して不變なるものとする。

又

$$S^\lambda=\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}y^\rho y^\sigma-2\Gamma^\lambda \qquad (7)$$

とおけば S^λ は反變 vector の成分なることを知る。更に

$$T^\lambda=\Gamma^\lambda_\rho y^\rho-2\Gamma^\lambda \qquad (8)$$

$$U^{\cdot\nu}_{\mu}=\Gamma^\nu_{\mu\rho}y^\rho-2\Gamma^\nu_\mu \qquad (9)$$

とおけば、

$$S^\lambda=T^\lambda+U^{\cdot\lambda}_{\rho}y^\rho \qquad (10)$$

なる関係を得る。Slebodzinski はこゝで三つの operation :

$$A^\kappa{}_{/\lambda}=\frac{\partial A^\kappa}{\partial x^\lambda}+\Gamma^\kappa_{\rho\lambda}A^\rho-\Gamma^\rho_\lambda\frac{\partial A^\kappa}{\partial y^\rho},$$

$$f_{/\lambda}=\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}-\Gamma^\rho_\lambda\frac{\partial f}{\partial y^\rho}$$

$$B_{\kappa/\lambda}=\frac{\partial B_\kappa}{\partial y^\lambda}-\Gamma^\rho_{\kappa\lambda}B_\rho-\Gamma^\rho_\lambda\frac{\partial B_\kappa}{\partial y^\rho}$$

$$A^\kappa{}_{|\lambda}=\frac{\partial A^\kappa}{\partial y^\lambda}, \quad B_{\kappa|\lambda}=\frac{\partial B_\kappa}{\partial y^\lambda},$$

$$f_{|\lambda}=\frac{\partial f}{\partial y^\lambda} \qquad (11)$$

$$\triangledown A^\kappa=y^\rho\frac{\partial A^\kappa}{\partial x^\rho}-2\Gamma^\rho\frac{\partial A^\kappa}{\partial y^\rho}+\Gamma^\kappa_\rho A^\rho$$

$$\triangledown B_\kappa=\frac{\partial B_\kappa}{\partial x^\rho}y^\rho-2\Gamma^\rho\frac{\partial B_\kappa}{\partial y^\rho}-\Gamma^\rho_\kappa B_\rho$$

$$\triangledown f=\frac{\partial f}{\partial x^\rho}y^\rho-2\Gamma^\rho\frac{\partial f}{\partial y^\rho}$$

(但し A^κ, B_κ, f は夫々反變 vector, 共變 vector, scalar とする)、を考へる。その結果 $A^\kappa{}_{/\lambda}$; $A^\kappa{}_{|\lambda}$; $\triangledown A^\kappa$ …… はまた Tensor 或は vector の成分の變換を受ける。次にポアツソンの演算を考へる。即ち.

$$A^\mu{}_{/\lambda/\kappa}-A^\mu{}_{/\kappa/\lambda}=-R_{\kappa\lambda\rho}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}A^\rho+K_{\kappa\lambda}^{\cdot\cdot\rho}A^\mu{}_{|\rho} \qquad (12)$$

$$A^\mu{}_{|\lambda/\kappa}-A^\mu{}_{/\kappa|\lambda}=-B_{\kappa\lambda\rho}^{\cdot\cdot\cdot\mu}A^\rho \qquad (13)$$

$$(\triangledown A^\mu)_{/\lambda}-\triangledown(A^\kappa{}_{/\rho})=-W_{\kappa\rho}^{\cdot\cdot\mu}A^\rho$$
$$+V_{\kappa}^{\cdot\rho}A^\mu{}_{|\rho} \qquad (14)$$

但し (以後 , は x に関する偏微分を表す)

$$R_{\kappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=\Gamma^\nu_{\mu\kappa,\lambda}-\Gamma^\nu_{\mu\lambda,\kappa}+\Gamma^\rho_{\mu\kappa}\Gamma^\nu_{\lambda\rho}-\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\kappa\rho}$$
$$+\Gamma^\rho_\kappa\Gamma^\nu_{\mu\lambda|\rho}-\Gamma^\rho_\lambda\Gamma^\nu_{\mu\kappa|\rho} \qquad (15)$$

$$K_{\kappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu}=\Gamma^\mu_{\kappa,\lambda}-\Gamma^\mu_{\lambda,\kappa}+\Gamma^\rho_\kappa\Gamma^\mu_{\lambda\rho}-\Gamma^\rho_\lambda\Gamma^\mu_{\kappa\rho} \qquad (16)$$

$$W_{\kappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu}=-\Gamma^\mu_{\lambda,\kappa}+\Gamma^\mu_\rho\Gamma^\rho_{\kappa\lambda}-\Gamma^\rho_\lambda\Gamma^\mu_{\kappa\rho}-2\Gamma^\rho\Gamma^\mu_{\kappa\lambda,\rho}$$
$$+y^\rho\Gamma^\mu_{\kappa\lambda,\rho} \qquad (17)$$

$$V_{\kappa}^{\cdot\lambda}=-2\Gamma^\lambda_{,\kappa}-\Gamma^\rho_\kappa\Gamma^\lambda_\rho-2\Gamma^\rho\Gamma^\lambda_{\kappa\rho}+y^\rho\Gamma^\lambda_{\kappa,\rho} \qquad (18)$$

$$B_{\kappa\lambda\rho}^{\cdot\cdot\cdot\mu}=\Gamma^\mu{}_{|\kappa|\lambda|\rho} \qquad (19)$$

而して (15), (16), (17), (18) の間には次の関係がある。

$$R_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu}+R_{\lambda\kappa\mu}{}^{\nu}=0$$
$$R_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu}+R_{\lambda\mu\kappa}{}^{\nu}+R_{\mu\kappa\lambda}{}^{\nu}=0$$
$$K_{\kappa\lambda}{}^{\mu}+K_{\lambda\kappa}{}^{\mu}=0 \quad W_{\kappa\lambda}{}^{\mu}-W_{\lambda\kappa}{}^{\mu}=K_{\kappa\lambda}{}^{\mu} \tag{20}$$
$$R_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu}=K_{\kappa\lambda}{}^{\nu}{}_{|\mu}$$
$$W_{\kappa\lambda}{}^{\mu}+K_{\kappa\lambda}{}^{\mu}=V_{\kappa}{}^{\mu}{}_{|\lambda}$$

さて吾々は絶対微分を

$$\delta A^{\kappa}=dx^{\rho}\,A^{\kappa}{}_{/\rho}+w^{\rho}\,A^{\kappa}{}_{|\rho} \tag{21}$$

但し

$$w^{\rho}=dy^{\rho}+\Gamma^{\rho}_{\sigma}\,dx^{\sigma}$$

を定義する。

§2 この空間で無限小變換（A）を考へ。之に対して D 演算子（Lie 演算子の拡張）を次のやうに定める。

Tensor に対して

$$DT^{i_1\cdots\cdots i_\nu}_{j_1\cdots\cdots j_s}=\left[T^{i_1\cdots\cdots i_\nu}_{j_1\cdots\cdots j_s}(\bar{x},\bar{y})-\bar{T}^{i_1\cdots\cdots i_\nu}_{j_1\cdots\cdots j_s}(\bar{x},\bar{y})\right]\delta t$$

$\Gamma^{\mu}(x,y)$ に対して

$$D\Gamma^{\mu}=[\Gamma^{\mu}(\bar{x},\bar{y})-\bar{\Gamma}^{\mu}(\bar{x},\bar{y})]\,\delta t$$

$\Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda}(x,y)$ に対して

$$D\Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda}=[\Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda}(\bar{x},\bar{y})-\bar{\Gamma}^{\mu}_{\kappa\lambda}(\bar{x},\bar{y})]\,\delta t$$

Γ^{μ}_{κ} に対しては

$$D^{\mu}_{\kappa}=[\Gamma^{\mu}_{\kappa}(\bar{x},\bar{y})-\bar{\Gamma}^{\mu}_{\kappa}(\bar{x},\bar{y})]\,\delta t$$

さすれば、V^{λ} を反變 vector とすれば、

$$\begin{aligned}DV^{\lambda}&=[V^{\lambda}(\bar{x},\bar{y})-\bar{V}^{\lambda}(\bar{x},\bar{y})]\,\delta t\\&=(V^{\lambda}{}_{,\rho}\,\xi^{\rho}-\xi^{\lambda}{}_{,\rho}V^{\lambda}+V^{\lambda}{}_{|\rho}\,\xi^{\rho},\ y^{\sigma})\,\delta t\\&=(\Gamma^{\rho}\,V^{\lambda}{}_{/\rho}-U^{\rho}\,\xi^{\lambda}{}_{/\rho}+V^{\lambda}{}_{|\rho}\nabla\xi^{\rho})\,\delta t\end{aligned}\tag{22}$$

T^{λ}_{μ} を tesor とすれば、

$$DT^{\lambda}_{\mu}=\xi^{\rho}\,T^{\lambda}_{\mu/\rho}-T^{\rho}_{\mu}\,\xi^{\lambda}{}_{/\rho}+T^{\lambda}_{\rho}\,\xi^{\rho}{}_{/\mu}+T^{\lambda}_{\mu|\rho}\nabla\xi^{\rho} \tag{23}$$

同様に

$$\begin{aligned}D\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}&=(\xi^{\kappa}{}_{,\mu,\nu}+\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu,\rho}\,\xi^{\rho}+\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu|\rho}\,\xi^{\rho}{}_{,\sigma}\,y^{\sigma}\\&\quad-\xi^{\kappa}_{,\rho}\,\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}+\Gamma^{\kappa}_{\rho\nu}\,\xi^{\rho}_{,\mu}+\Gamma^{\kappa}_{\mu\rho}\,\xi_{,\mu})\,\delta t\\&=(\xi^{\kappa}{}_{/\mu/\nu}+R_{\nu\rho\mu}{}^{\kappa}\,\xi^{\rho}+B_{\mu\nu\rho}{}^{\kappa}\nabla\xi^{\rho})\,\delta t\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}D\Gamma^{\mu}_{\kappa}&=(\Gamma^{\mu}_{\kappa,\rho}\,\xi^{\rho}+\Gamma^{\mu}_{\kappa|\sigma}\,\xi^{\sigma}{}_{,\rho}\,y^{\rho}+\xi^{\rho}_{,\kappa}\,\Gamma^{\mu}_{\rho}-\xi^{\mu}_{,\rho}\Gamma^{\rho}_{\kappa}\\&\quad+\xi^{\mu}_{,\kappa,\rho}\,y^{\rho})\,\delta t\end{aligned}\tag{25}$$

尚（22）によつて

$$\begin{aligned}Dy^{\lambda}&=\xi^{\rho}\,y^{\lambda}{}_{/\rho}-y^{\rho}\,\xi^{\lambda}{}_{/\rho}+y^{\lambda}{}_{|\rho}\nabla\xi^{\rho}\\&=0\end{aligned}\tag{26}$$

さて V^{λ} T^{λ}_{μ} を、夫々、vector 及び tensor とすれば

$$(DV^{\lambda})_{/\nu}=\frac{\partial DV^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}+\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\,DV^{\rho}-\Gamma^{\rho}_{\nu}\,\frac{\partial DV^{\lambda}}{\partial y^{\rho}}$$

$$D(V^{\lambda}{}_{/\nu})=\left(\frac{\partial V^{\lambda}{}_{/\nu}}{\partial x^{\rho}}\,\xi^{\rho}+\frac{\partial V^{\lambda}{}_{/\nu}}{\partial y^{\rho}}\,\frac{\partial\xi^{\rho}}{\partial x^{\sigma}}\,y^{\sigma}-\frac{\partial\xi^{\lambda}}{\partial x^{\rho}}\,V^{\rho}{}_{/\mu}+\frac{\partial\xi^{\rho}}{\partial x^{\nu}}\,V^{\lambda}{}_{/\rho}\right)\delta t$$

従て

$$\begin{aligned}D(V^{\lambda}{}_{/\nu})-(DV^{\lambda})_{/\nu}&=(D\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu})V^{\rho}-\frac{\partial V^{\lambda}}{\partial y^{\rho}}(D\Gamma^{\rho}_{\nu})\\&=(D\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu})V^{\rho}-V^{\lambda}{}_{|\rho}(D\Gamma^{\rho}_{\nu})\end{aligned}\tag{27}$$

同様に

$$\begin{aligned}D(T^{\lambda}_{\mu/\nu})-(DT^{\lambda}_{\mu})_{/\nu}&=(D\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu})T^{\rho}_{\mu}-(D\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})T^{\lambda}_{\rho}\\&\quad-T^{\lambda}_{\mu|\rho}(D\Gamma^{\rho}_{\nu})\end{aligned}\tag{28}$$

なる結果を得るから次の定理を得る。

Theorem : 任意の tensor に対して
$D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=0$, $D\Gamma^{\lambda}_{\mu}=0$が共に成立するとき
演算 D と / とは交換可能である。

次に | と D との関係について考へる。

$$(DV^{\kappa})_{|\lambda}=\frac{\partial DV^{\kappa}}{\partial y^{\lambda}}$$

$$D(V^{\kappa}{}_{|\lambda})=\left(\frac{\partial V^{\kappa}{}_{|\lambda}}{\partial x^{\rho}}\,\xi^{\rho}+\frac{\partial V^{\kappa}{}_{|\lambda}}{\partial y^{\rho}}\,\frac{\partial\xi^{\rho}}{\partial x^{\sigma}}\,y^{\sigma}-\frac{\partial\xi^{\kappa}}{\partial x^{\rho}}V^{\rho}{}_{|\lambda}+\frac{\partial\xi^{\rho}}{\partial x^{\lambda}}V^{\kappa}{}_{|\rho}\right)\delta t$$

従て計算の結果

$$D(V^{\kappa}{}_{|\lambda})-(DV^{\kappa})_{|\lambda}=0 \tag{29}$$

又 $$D(T^{\lambda}_{\mu|\nu})-(DT^{\lambda}_{\mu})_{|\nu}=0 \tag{30}$$

である。

Theorem : 演算 | と D とは常に交換可能である。

§3 次に無限小變形（A）によつて path 系を path 系に移すことを考へる。即ち path 系を（1）で與へたとき（A）によつて不變なるためには明かに

$$D\Gamma^{\mu}=0 \tag{31}$$

でなければならない，

今吾々は特別なる場合を考へる。即ち Γ^{μ} が $T^{\lambda}=0$ なる関係を満す場合である。

このとき簡單な計算によつて

$$U_{\mu}{}^{\nu}=0 \tag{32}$$

従て

$$S^{\lambda}=0 \tag{33}$$

となる。又演算 / は

$$A^{\kappa}{}_{/\lambda}=\frac{\partial A^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}}+\Gamma^{\kappa}_{\rho\lambda}A^{\rho}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\frac{\partial A^{\kappa}}{\partial y^{\rho}}\,y^{\sigma} \tag{34}$$

となり、$\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$ を affine 接続係数、(34) を共變微分と考へる。そのときの曲率 tensor は $R_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu}$である。

さて（33）より

$$DS^{\lambda}=0$$

従つて

$$D\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\,y^{\rho}\,y^{\sigma}=2D\Gamma^{\lambda}$$

條件 (31) を入れゝば、

$$D\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\, y^{\rho}\, y^{\sigma}=0 \tag{35}$$

これは　高野氏：K−Spread　の空間の無限小變形（数学第１卷３号）に於て　K＝1, Ddu＝0　なる場合に帰結する。

即ち　　$T\lambda=0$ より

$$\nabla\xi^{\lambda}=y^{\sigma}\,\xi^{\lambda}{}_{/\sigma} \tag{36}$$

となり、更に　$(D\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma})_{|\nu}=(D\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma})_{|\rho}$　を使へば (35) より

$$D\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}=0 \tag{37}$$

從つて (23) より

$$D\Gamma^{\lambda}_{\rho}=0 \tag{38}$$

尙 (24), (36) を使つて (37) を書き直せば

$$\xi^{\lambda}{}_{/\rho/\sigma}+R_{\sigma\omega\cdot\rho}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}\,\xi+B_{\rho\sigma\omega}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}\,\xi^{\omega}{}_{/\nu}\,y^{\nu}=0 \tag{39}$$

を得る。之は無限小擬相称の條件である。尙 (39) の積分可能條件に関しては前記論文参照され度い。一般の場合及び連続變換群への論及はこゝでは止めて今は序論的考察にとゞめる。

(1950.　9.　15)

參　考　論　文

1. Kentaro, Yano : Groups of Transformations in generalized spaces. Akademeia press company ltd. Tokyo, Japan 1949
2. W. Slebdzinski : Sur deux connexions affines générallisées.
3. 高野一夫：K-Spreads の空間の無限小變形たついて。数学第１卷第３号：(210—211)(1948)

或る麻雀の組合せの問題

奥　田　恵　孝

北海道学藝大学旭川分校数学研究室

Eko OKUDA : On a Certain Combination of Majong-Games.

は　し　が　き

“４種の階層からそれぞれ４人の選手を出して４チームを作り、４卓を囲んで麻雀戰をやるのに、

①同チームの人とは当らず、②他チームの人でも一度当つた人とは再び当らず、且つ③必ず他チームの人全部と当る。

という條件の下では何荘まで出來るか、又出來るとすればその組合せ如何”という問題を本夏の現職教育で置換群、組合せ等の講義中、紋別郡遠軽町社名淵小学校長、森透氏に質問されたが多忙のため深く考えもせず放任しておいた所、４荘まで出來る組合せを暗探法によつて求めた一例をレポートにし提出された。だが理論的に解明出來ないとのことである。“出來る回数は最大４荘まででそれ以上回数を重ねれば必ず２人が重複して出会うこと”は直ちに判る。というのは或一人について考えるのに１荘で３人、2荘で６人、３荘で９人、４荘で12人に当るので自分のチーム以外の人に限なく当つたことになるからである。併し所要の組合せ方を発見する理論は容易ではなく又筆者は麻雀を全く知らないので麻雀に熟達した友人にその実際を尋ねたらよく起る問題だがその正規の組合せは容易でないので適当にしているとのこと、止むなく数日考え込んで得た一解法を述べようと思う。勿論この種の問題は既に解決しているかも知れないが、実際に屢々遭遇することであり、３個乃至４個のものの置換群の構造を看取するのに好個の例でもある。

本校高田助教授は透明な考え方でｎ人１組、ｎチームの場合を考えておられる。本研究の示唆を與えられた高田、森両先生に謝意を表する。

1. チーム名を a, b, c, d；卓名を A, B, C, D とし第１荘に於て A, B, C, D 各卓についた各チームの４名をそれぞれそのチームの 1, 2, 3, 4, とする。——第１荘。又 a チームの 1, 2, 3, 4 をそれぞれ A, B, C, D 卓のテーブル・マスターとしよう。

第１荘

卓＼チーム	a	b	c	d
A	1	1	1	1
B	2	2	2	2
C	3	3	3	3
D	4	4	4	4

2. 次に第２荘A卓に b チームの２がついたとする。３又は４がついたとしても以下の議論では、その３又は４と２とを交換して考え得るので一般性を失わないことが後程判明するであろう。