とする。

以下 F をきめるため先づ Parameter 空間の領域 $o \leqq S_i \leqq 1$ ($i=1,\cdots\cdots,n$) を充分小さな n 次元立方体 $W_1, W_2\cdots\cdots, W_k$ に分けて、その一つ W_e 間では f による像が T^m の各 Faktor S^1 の半円周内にあるようにする。（f の連続性）

然らば、$S'_1 \times S'_2 \times \cdots\cdots \times S'_n \in W$ なる一つの値に対し、II なる性質をもつ $F(S'_1, S'_2, \cdots\cdots, S'_n)$ なる値をきめると、W 間で一意で連続、然も I を充す函数 F がきまる。(2π の整数倍のとびがない。)

さて、$F(0,0,\cdots\cdots,0)$ を点 $f(P_1(0), P_2(0) \times \cdots\cdots \times p_m(0))$ に属する $(L_1, L_2, \cdots\cdots, L_m)$ の一つの値とす。

然らば全 W_1 ($0\times 0 \times \cdots\cdots \times 0$ を含むとす) で $F(S_1, S_2, \cdots\cdots S_n)$ は定まる。故に、特に W_1 と交る W_2 の点でも定まる。

然らば亦、全 W_2 でも F は定まりそれを続ける、故に F は、$o \leqq S_i \leqq 1$ なる n 次元立方体の領域できめられた。

然らば II から

$$F(1,0\cdots\cdots,0)=F(0,\cdots\cdots,0)+(u_{11}\cdot 2\pi,\cdots\cdots,u_{1m}\cdot 2\pi)$$
$$F(0,1,\cdots\cdots,0)=F(0,\cdots\cdots,0)+(u_2{}^1\cdot 2\pi,\cdots\cdots,u_{2m}\cdot 2\pi)$$
$$F(0,\cdots\cdots,0,1)=F(0,\cdots\cdots,0)+(u_{n1}\cdot 2\pi,\cdots\cdots,u_{nm}\cdot 2\pi)$$

但し u_{ij} は整数で、T^m の角の組に対する加減は m 次元ユークリッド空間の座標のそれと同じである。

又 $F(S_1, S_2, \cdots\cdots, s_{k-1}, 1, S_{k+1}, \cdots\cdots, S_n)$
$= F(S_1, S_2, \cdots\cdots S_{k-1}, 0, S_{k+1}, \cdots\cdots, S_n)$
$+ (u_k{}^1\cdot 2\pi\cdots\cdots, u_k{}^m\cdot 2\pi)$

(何となら、u_{ki} は整数で

仮に $F(S_1,\cdots\cdots,S_{k-1}, 1, S_{k+1},\cdots\cdots,S_n)$
$=F(S_1,\cdots\cdots S_{k-1}, 0, S_{k+1},\cdots\cdots,S_n)$
$+u'_{k1}\cdot 2\pi\cdots\cdots u_{km}\cdot 2\pi)$

だとすると F は各 S_i の連続函数だから
$u_{ki}=n'_{ki}$ でなければならぬ。)

今任意の S_i に対しては F を次の函数方程式で定義する。

$$F(S_1+\alpha_1, S_2+d_2,\cdots\cdots,S_n+d_n)-F(S_1,S_2,\cdots\cdots,S_n) = (\Sigma d_i\, u_{i1}\cdot 2\pi,\cdots\cdots,\Sigma d_i\, u_{im}\cdot 2\pi)$$

但し d_i は 0 又は 1

故に f に対して常数 $u_{ig}\begin{pmatrix} i=1,2,\cdots\cdots,n \\ j=1,2,\cdots\cdots,m\end{pmatrix}$ がきめられたが之が函数 F の作り方に独立なることも簡単に証明される。

定　理　$T^n \to T^m$ なる二つの連続變換 f, f' が homotop なる必要且、充分條件は、夫々 f, f' に属する常数を u_{ij}, u'_{ij} とすると　$u_{ij} = u'_{ij}$ なること

証　明：

1. 充分なること。
   f_1, f' の函数を夫々 F, F' とするとき
   $F_t = F + t(F'-F)$ とおく
   この F_t は先に與えた函数方程式を充す。
   T^n の点に F_t に属する角の組できまる T^m の点を対應させると、$T^n \to T^m$ なる連続變換 f_t を生じ明かに f_t は f, f' の homotop を與える。
2. 必要なこと。
   f, f' の Abbildungscher を f_t とする
   f_t の常数を $u^t{}_{ij}$ とおくと、
   $F_t(S_1+d_1,\cdots\cdots,S_n+d_n)-F_t(S_1,\cdots\cdots,S_n)$
   $=(\Sigma\alpha_i\, n^t_{i1}\, 2\pi,\cdots\cdots,\Sigma d_i\, u^t_{im}\cdot 2\pi)$
   左辺は t と共に連続的に變化するから
   u^t_{ij} の整数なることから
   　u^t_{ij} は常数でなければならぬ
   $\therefore\ u^o_{ij} = u^1{}_{ij}$ 即ち $u_{ij} = u'_{ij}$

q. e. d.

Essential Spectrum について

久 保 田 陽 人

北海道学藝大学函館分校

Yōto. KUBOTA: On the Essential Spectrum.

1. $f=f(t)$ は $0\leqq t<\infty$ に於ける実連続函数、λ は real papameter を表すものとする。

微分方程式

(1)　$x''+(\lambda+f(t))x=0$

は、或る λ に対して（従つてすべての λ に対して）(1)が

$$\int_0^\infty x^2(t)dt=\infty$$

を満たす解を有するならば、Weyl〔1〕p. 238 に従つて Grentzpunktfall であると云ふ。

この場合には、(1) は境界條件

(2) $x(0)\cos\alpha+x'(0)\sin\alpha=0$

$$(0\leqq\alpha<\pi)$$

の下で固定された α に対しSpectrum $S(\alpha)$ を決定する。$S(\alpha)$ は (2) を満たす (1) の解が存在する様な λ の集合である。Spectrum は Point Spectrum $P(\alpha)$ と Continuous Spectrum. $C(\alpha)$ より成る。前者は (2) の他に

(3) $\int_0^\infty x^2(t)\,dt<\infty$

を満たす (1) の解 $x=x(t)$ が存在する λ の集合であり、後者は $S(\alpha)$ の或る区間よりなるものである。基礎領域が無限区間であつたり、係数函数 $f(t)$ が不連続点をもつ場合には Continuous Spectrum の存在が言はれる。

〔2〕p. 310によれば、$S(\alpha)$ は上方に有界なることは出来ない。又 $C(\alpha)$ は空か非有界である。〔3〕p. 782 更に〔1〕p. 251 によれば、$S(\alpha)$ の導集合は α に無関係なることが知られてゐる。之を S' で表し Essential Spectrum と呼ぶ。從つて Essential Spectrum は $P(\alpha)$ の集積点と $C(\alpha)$ の全体よりなる。〔4〕で次の事が示された。

S' に含まれないすべての実数は、或る α に対して、$p(\alpha)$ に属する。

故に、$\lambda=\lambda_0$ に於て、(1) が (3) を満たす解を一つも持たないならば、$\lambda=\lambda_0$ は S' に属することになる。

次の定理を証明することが出來る。

（定 理）

微 分 方 程 式

(1′) $x''+(\lambda_0+f(t))\,x=0$

に於て、$f=f(t)$ は

(4) $\int_0^\infty f^2(t)\,dt<\infty$ 即 $L^2(0.00)$

をみたす。然る時、(1′) の解 $y=y(t)$ で

$$\int_0^\infty y^2(t)\,dt=\infty,\ y(t)=0(1),\ y'(t)=0(1)$$

を満足するものが存在すれば、$\lambda=\lambda_0$ は Essential Spectrum に属する。

証明の方法は Hartmann, Wintner〔5〕と全く同じ。

2. 定 理 の 証 明

條件 (4) は (1) が Grentzpunkt fall なる爲に十分であることは〔7〕に示されてある。

今 $\lambda=\lambda_0$ が S' に属しないとする。然る時は、λ_0 は或る α に対して $P(\alpha)$ に属するから (1′) は L_2 なる解 $x=x(t)$ を持つ。〔6〕によれば、(4) の下で (1′) が L^2 解 $x=x(t)$ を持てば、必ず

$x(t)=0(1)$, $x'(t)=0(1)$ である。

仮設によれば、L_2 でない $y=y(t)$ が存在して、

$y(t)=0(1)$, $y'(t)=0(1)$

である。$x(t)$ と $y(t)$ は独立解であるから其の Wronskian は 0 でない常数でなければならない。併し他方上式より明に 0 である。

之は矛盾である。故に λ_0 は S' に属する。(終)

〔5〕に於て已に次の事が証明されてある。

(5) $\limsup_{t\to\infty} f(t)<\infty$

なる條件の下で、(1′) が L^2 でなく

$x(t)=0(1)$

を満たす解を有するならば、$\lambda=\lambda_0$ は S' に属する。

(5) の仮定は $x(t)=0(1)$ ならば $x'(t)=0(1)$ を導くから（〔5〕），吾々の結果は形式的には之と一致する。併し、(4) であつても、必ずしも (5) は成立しないから、Trivial ではない。

参 考 文 献

〔1〕 H. Weyl, "Ueber Gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen," math, ann, vol. 68 (1910), pp. 220–269

〔2〕 P. Hartmann and A. Wintner, "On the orientation of unilateral spectra" American Journal of Math. vol. 70 (1948), p. p. 309–316

〔3〕 A. Wintner, "On Dirac's theory of continuous spectra," Physical Review, (1948) pp 781–785

〔4〕 P. Hartmann and Wintner, "On oscillation theorem for continuous spectra", Proceedings of the National Academy of Sciences. vol 33 (1947), pp. 376–379

〔5〕 P. Hartmann and A. Wintner. "On the location of Spectra of wave equation" American Journal of Math. vol 71 (1949) pp. 214–217

〔6〕 S. Wallach. "On the location of spectra of diferential equation", American Journal of Math. vol 70 (1948)

〔7〕 C. Putnam. "On the Spectra of certain Boundary value problems." American Journal of Math. Jan. (1949) pp. 109～pp. 111