

Title	実数値函数の連続性と可微分性について
Author(s)	藤戸, 伊佐美
Citation	北海道教育大学紀要. 第二部. A, 数学・物理学・化学・工学編, 30(1) : 1-3
Issue Date	1979-09
URL	<a href="http://s-ir.sap.hokkyodai.ac.jp/dspace/handle/123456789/6033">http://s-ir.sap.hokkyodai.ac.jp/dspace/handle/123456789/6033</a>
Rights	

## 実数値函数の連続性と可微分性について

藤 戸 伊 佐 美  
北海道教育大学函館分校数学教室

### On the Continuity and the Differentiability of the Function

Isami FUJITO

Mathematics Laboratory, Hakodate College, Hokkaido University of Education,  
Hakodate 040

#### Abstract

We have been studying how to make a connected function of a continuous function and a differentiable function. In the first part of this paper, we tried to investigate the monotonic property of the difference function between the continuous part and the differentiable part of a connected function. In the last part of this paper, we showed that a continuous function of a bounded variation had the connected function which was made of a continuously differentiable function and a continuous function in some subinterval.

#### 1 序

実数の有界な区間を  $I$  とする。  $e$  は可附番無限集合で、  $I$  で稠密とする。  $e$  で一様連続な函数  $f$  と、  $I - e$  で可微分な函数  $g$  の組に対して、  $e$  を与えれば、一意に定まる  $I$  上の函数について、第2節で述べる。

第3節では、測度零の集合を、可附番稠密集合と、そうでない集合に分け、有界変動連続函数の場合について、第2節で取り扱った函数との関聯を述べる。

#### 2 連続性と可微分性

実数の有界閉区間を、  $I = [a, b]$  とする ( $a < b$ )。  $I$  の部分集合  $e$  は、可附番集合で、  $I$  で稠密とする。  $f, g$  は、  $e$  で連続で、  $I - e$  で可微分な函数とする。  $I - e$  で、  $f'(x) = g'(x)$  で、  $f(a) = g(a)$  とすると、Bourbakiの有限増分の定理を用いて、  $a \leq x \leq b$  なる任意の  $x$  に対して、  $f(x) - f(a) \geq g(x) - g(a)$ 、かつ  $f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a)$  となり、  $f(x) = g(x)$  となる。

一方、  $f, g$  が  $I$  で連続であるから、  $e$  で  $f = g$  ならば、  $I$  で  $f = g$  となる。

改めて、  $I$  で連続な函数  $f$  と、  $I - e$  で可微分な  $I$  上の連続函数  $g$  とを。  $e$  上で  $f$  と一致し、  $I - e$  上で導函数  $g'$  を持つ  $I$  上の函数を考える。この函数を  $(f)g$  と記す。  $(f)g$  を求める方法については、既に発

表をしたが、こゝでは、少し異なった観点からの説明と、この函数の性質について述べる。 $\Delta_n$ は  $e$  上に分点を持つ分割である。即ち、 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  で、 $x_i (i=1, 2, \dots, n-1)$  は  $e$  の元である。

$$|\Delta_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}|$$

として、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $|\Delta_n| \rightarrow 0$  とする。 $f$  は  $e$  で連続で、 $I - e$  で可微分とする。Weierstrass の定理を用いて、 $L_n$  を  $[x_{i-1}, x_i] (i=1, 2, \dots, n)$  で一次函数とし、 $I$  で連続とすると、 $L_n \rightarrow f (n \rightarrow \infty)$  となるように、 $L_n$  をとることが出来る。 $I - e$  で  $f$  が可微分より、 $I - e$  で  $L'_n \rightarrow f' (n \rightarrow \infty)$  となる。これは、 $h, k > 0$  とすると、 $I - e$  の点  $x$  に対して、

$$\frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k} = \frac{h}{h+k} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) + \frac{k}{h+k} \left( \frac{f(x-k) - f(x)}{-k} \right)$$

より、 $h, k \rightarrow 0$  のとき、 $f'(x)$  に収束するからである。

改めて、 $L_n$  を  $[x_{i-1}, x_i] (i=1, 2, \dots, n)$  の夫々で一次函数とし、 $f$  は  $I$  上の連続函数で、 $L_n(x_i) = f(x_i)$  とする。 $L_n$  を、 $\Delta_n$  の分点を除き  $L'_n = L''_n$  とし、 $I$  で連続とする。更に、 $g$  を  $I - e$  で可微分な  $I$  上の連続函数とし、 $L_n \rightarrow g (n \rightarrow \infty)$  とする。但し、任意の  $n$  に対して、 $L_n(a) = L_n(b)$  とする。このとき、 $(L_n, L'_n)$  で函数の組  $(f, g)$  が一意に定まる。 $L_n$  の極限として定まる  $I$  上の函数が  $(f)_\theta$  となる。

$e$  の元  $x$  については、一般に  $L_{n+}(x) \neq L_{n-}(x)$  で、 $L_{n+}(x)$  は  $+\infty$ 、又は  $-\infty$  となる。 $e$  の元  $x$  に対して、 $(f)_{\theta\pm}(x)$  の値は、 $L_{n\pm}(x)$  の  $n \rightarrow \infty$  としたときの極限值とする。従って、 $e$  の元  $x$  に対して、 $(f)_{\theta\pm}(x)$  は、 $+\infty$ 、 $-\infty$ 、 $g'_+(x)$ 、 $g'_-(x)$  のいずれかの値をとる。

特に、 $L_n$  が  $I - e$  の任意の元  $x$  と、任意の  $\epsilon > 0$  に対して、適当な自然数  $N$  がとれて、 $N \leq n < m$  のとき、 $L_n$  に対する分割  $\Delta_n$  で、 $x$  を含む分割  $\Delta_n$  の一つの开区間を  $\Delta_n(x)$  と記すと、 $\Delta_n(x)$  の任意の元  $y$  について、 $|L'_n(x) - L'_m(y)| < \epsilon$  が成立すれば、 $g'$  は  $I - e$  で連続となる。 $(f)_\theta$  の積分は、

$$\int_a^x (f)_\theta(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x L_n(x) dx \text{ と定める。従って、}$$

$$\int_a^x (f)_\theta(x) dx = \int_a^x f(x) dx \text{ となる。}$$

$e$  の任意の元  $x$  に対して、 $g'_+(x) (x \neq b)$  が存在して、 $(f)_{\theta+}(x) \geq g'_+(x)$  ならば、 $(f)_\theta - g$  は単調増加函数となり、 $e$  の元  $x, y$  に対して、 $y > x$  のとき、 $f(y) - g(y) \geq f(x) - g(x)$  となる。 $f - g$  は  $I$  で連続函数だから、 $I$  で  $f - g$  は単調増加函数となる。又、 $e$  の任意の元  $x$  に対して、 $(f)_{\theta+}(x) = g'_+(x)$  ならば、 $f = g$  となる。

特に、 $g$  が  $I$  で連続可微分函数のとき、 $f \neq g$  ならば、 $e$  の元  $x$  に対して、 $(f)_{\theta+}(x) \neq g'(x)$ 、又は  $(f)_{\theta-}(x) \neq g'(x)$  となる。 $(f)_{\theta+}(x) \neq g'(x)$  のとき、 $(f)_{\theta+}(x) > g'(x)$  となる  $e$  の部分集合を  $e_1$ 、 $(f)_{\theta+}(x) < g'(x)$  となる  $e$  の部分集合を  $e_2$  とする。 $e_1, e_2$  のいずれかが非稠密の時、適当な部分区間をとれば、一方の場合か、又は連続可微分函数と一致するので、 $f - g$  は単調函数となる。 $e_1, e_2$  のいずれもが稠密であるときは、除外集合を  $e_1, e_2$  として考えれば、夫々の場合に  $f - g$  は単調函数となることより、 $f = g$  となり、この場合は起り得ない。

### 3 有界変動連続函数の可微分性

$e$  は有界閉区間  $I$  の部分集合とし、 $m(e)$  は  $e$  の測度を示す。 $e$  が非可算集合で、 $m(e) = 0$  のとき  $e$  は非稠密集合となる。何故なら、 $e$  を稠密集合と仮定してみる。 $I$  の分割列  $\Delta_n$  をとり、 $\Delta_{n+1}$  は  $\Delta_n$  の細分割列となるようにし、更に  $|\Delta_n| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$  とする。 $\Delta_n$  により定まる  $n$  個の開区間を  $\Delta_n^{(j)}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) と記す。仮定より、 $\Delta_n^{(j)} \cap e \neq \emptyset$  となる。 $\Delta_n^{(j)} \supset F_n^{(j)}$  となる閉区間  $F_n^{(j)}$  をとる。 $e$  が非可算集合であることより、 $F_n^{(j)}$  は一点からなる閉区間とはならない。 $e$  は  $\bigcap_n (\bigcup_j F_n^{(j)})$  を含む。 $m(e) = 0$  より  $\sum_j |F_n^{(j)}| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$  となる。一方、任意の  $n$  に対して、 $\sum_j |\Delta_n^{(j)}| = |I|$  となることより、適当な  $\Delta_n^{(j)}$  があって、 $\Delta_n^{(j)} \cap e = \emptyset$  となり、 $e$  を稠密集合としたことに反する。

次に、 $e$  は可算集合で、 $I$  で稠密とする。 $f'$  を  $I - e$  で可積分とすると、 $e$  の任意の元  $x$  に対して  $f'(x+0) = f'(x-0)$  となる。即ち、 $f'$  は  $I$  で連続となるように拡張出来る。それは、 $\Delta_n$  を  $e$  上に分点を持つ分割列とし、 $|\Delta_n| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$  とする。 $f'$  が可積分より、 $\Delta_n$  の各区間で定数値をとる階段函数  $\varphi_n$  を適当にとれば、 $\varphi_n \rightarrow f' (n \rightarrow \infty)$ 、測度的) となる。何故なら、上記の性質をもつどんな階段函数に対しても上記のことが成立しないならば、 $f'$  は、 $\Delta_n$  の分点の  $n$  についての和集合を  $e_1$  とすると、 $I - e_1$  で可積分でない。従って、 $f'$  は  $I - e$  で可積分でないことになり、仮定に反する。そこで、2種類の分割列  $\Delta_n, \Delta'_n$  をとる。 $|\Delta_n| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 、 $|\Delta'_n| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$  とし、 $\Delta_n, \Delta'_n$  はいずれも  $e$  上に分点を持つ。 $\Delta_n, \Delta'_n$  の分点の  $n$  についての和集合を夫々  $e_1, e_2$  とし、 $e_1 \cap e_2 = \emptyset$  とする。このとき、 $\varphi_n^{(1)} \rightarrow f' (n \rightarrow \infty)$ 、測度的)、 $\varphi_n^{(2)} \rightarrow f' (n \rightarrow \infty)$ 、測度的) となるような、 $\Delta_n, \Delta'_n$  の各区間で定数値をとる階段函数  $\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}$  が仮定よりとれる。従って、 $e_1$  に属する任意の元  $x$  に対しては、 $\varphi_n^{(2)}(x) \rightarrow f'(x) (n \rightarrow \infty)$  となり、 $e_2$  に属する任意の元  $x$  に対しては、 $\varphi_n^{(1)}(x) \rightarrow f'(x) (n \rightarrow \infty)$  となる。こゝで  $f'(x)$  は、他の階段函数の極限值を示すのに、便宜的に使用した。とにかく、 $e_1 \cup e_2$  の元  $x$  に対しては、 $f'(x+0) = f'(x-0)$  となることが示された。 $e$  の任意の元  $x$  を分点として持つ分割列と  $x$  を分点として持たない分割列が作れることより、上記命題が成立する。

$f$  が有界変動連続函数のときは、測度零の集合を除き、 $f'$  が存在し、可積分であるので、上のことと、第2節より適当な区間列の中で、 $(f)_{f'(x)} dx$  と表わされ、 $f'(x)$  はその区間列の区間の中で連続に拡張することが出来る。云いかえると、 $f$  が有界変動連続函数ならば、適当な区間の中で  $\int f'(x) dx$  は連続可微分となる。又、第2節の結果より、各区間で、 $f - \int f'(x) dx$  は単調函数となる。従って、その区間では、 $f$  は単調函数である。尚、 $f$  が絶対連続函数のときは、 $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x) dx$  となり、適当な区間で  $f'$  が連続に拡張出来ることより、その区間で  $f$  は連続可微分函数となる。