Title	ブロックを利用しての十進位取記数法指導過程の批判的考察 ： 表現の再構成過程モデルの事例として
Author(s)	礒田，正美
Citation	年報いわみざわ ： 初等教育・教師教育研究，12： 43-51
Issue Date	1991-03
URL	http://s-ir.sap.hokkyodai.ac.jp/dspace/handle/123456789/8565
Rights	本文ファイルはNIIから提供されたものである。

ブロックを利用しての十進位取記数法指導過程の批判的考察
～表現の再構成過程モデルの事例として～

礒　田　正　美

はじめに

小学1、2年算数科におけるブロック（もしくはタイル等）を利用しての十進位取記数法の導入、構築は、児童が最初に直面する数学の抽象過程として、興味深い。一方で、5、6年教材に比べれば小学1、2年の算数教材は達成度が高くあまり問題視されていない。ところが、筆者の参観経験では、この段階からつまづいている児童が予想外に認められる。系統的学習を基本とする算数数学科では基本的な加減、乗法等でのつまづきは、その後の児童の成長に致命的影響を与えるとさえ考えられる。そこで、その抽象過程に潜む問題を明らかにするために、本稿では「ブロックから十進位取記数法による表現がどのように導入され、構築されていくか、そしてその表現の意味が変容していくかを記述することにより、学習指導において予想される児童の変容過程を示し、十進位取記数法の表現指導の在り方を提起すること」を課題とする。本稿で対象とする十進位取記数法は小学2年までの数と計算を指す。そこで利用される具体事象や教具は多様であるが、ここでは疑問の多い活用法の目立つ、ブロック（タイル）を利用した場合を論ずる。課題に対して、以下のようなアプローチをする。本稿では、まず筆者の研究結果を、小学1、2年で学習される「ブロックから十進位取記数法への数学化」事例に適用する。そしてその適用により、抽象された自然数から、自然数の加法減法への数学言語の再構成過程を記述し、予想される発達段階を仮説設定する。そして、その仮説から、扱いに疑問のある学習指導例を基に、学習指導の在り方を提起する。繁雑な議論を求めない方は、後半のⅢから読み始められたい。

本稿では、先に報告した「数学化における言語の再構成過程に関する一考察～表現の発展と意味の変容に着目して～」[1]で提出した表現と意味の記述枠組みを、ブロックから記数法への場合へ適用することを考察方法とする。そこで、研究経緯を述べる。

筆者は、学習指導過程改善の意図から、数学の生産過程を数学化という用語で記述し、研究してきている[2]。これまでの研究では、数学化過程において、使われる言語が再構成される事態が確認された[3]。そこで、その言語の再構成の立場から、数学化過程を記述することが課題となり前出論文に至った。前出論文の目的は「数学化過程において数学言語が再構成される過程をモデル化すること」にあった。そこでは、数学言語を、「分割数」の授業過程で生じる諸表現と意味により分析した。その分析は、教師、教材（数学）、子供の三角モデルで言えば、教材（数学）の側からformalな表現を分析するものである。そして、言語の再構成過程を表現の再構成過程としてモデル化した。そのモデルから得られたfindingは次の二点である。

① カリキュラム開発及び学習指導過程構成に際し、表現の導入活用発展過程を構成するに際して、一般的に考慮すべき過程や原理を、数学（教材）の側から提出した。

② 個の学習による発達変容を、表現理解の立場から記述するに際して、数学の側からの発達段階の仮説設定するための枠組みを提出した。

前出論文の限界は、formalな分析に留めた点にある。そこでは、子供のinformalな表現による思考活動や、その表現によるcommunication過程の分析、そしてinformalな表現からformalな表現へと進む学習指導過程の分析、formalな表現の獲得過程の分析などを捨象している。それらは、数学化過程における多様なdynamismを記述する上では、基本的な

要素である。その意味で前出論文で得た表現の再構成過程のモデル化は、その dynamism を捨象した上で成立している。

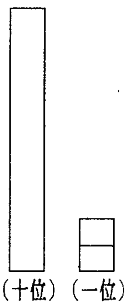
本稿の構成を述べる。まず、前出論文で設定した表現と意味の記述枠組みによりブロック及び十進位取記数法を記述する（Ⅰ）。次に、そこでの表現の再構成過程を記述する（Ⅱ）。最後に、上記①②を適用することで、本稿の finding としての学習指導原理を提示し、そこでの問題提起を行なう（Ⅲ）。

Ⅰ．記述枠組みの適用

本稿の事例であるブロック及び十進位取記数法を、前出論文の記述枠組みに従い記述する。前出論文においては、数学言語の再構成課程を記述するために「表現、表現法、翻訳、表現系、意味、表現世界」という用語を規定し、表現と意味の記述枠組みを設定した。以下、記述枠組を解説する中で、本稿の事例をその枠組みで記述していく。

表現とは「記号、図、物等による個々の数学的表現そのもの」を指す。ただし、formal な数学的表現のみを分析対象とする本稿では、その表現が、発話されたものか、記述されたものか等の区別はしない。この事例では、次の2つの表現が認められる。

右はブロック表現の例である。右の表現は、十進位取記数法導入後の表現であり、それ以前は、ブロック12個をつなげるのが普通である。それに対して、十進位取記数法では数字「12」が対応する表現の例になる。



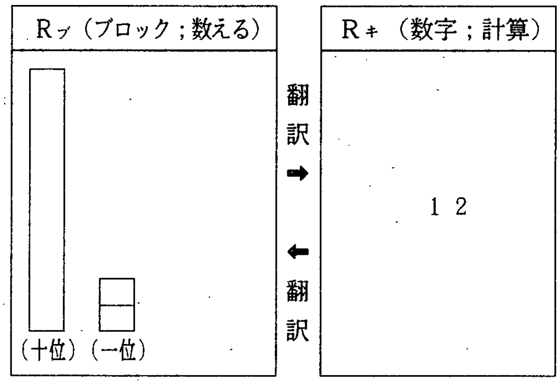
表現法Rとは「特定の表現の集合」を指す。集合の内容を明記する為に、表現法Rを、表現自体S、表現の生成操作OによりR(S;O)と規定する。

例えばブロック表現法$R_{\text{ブ}}$では、ブロック表現が表現自体Sである。そして、数えること、グルーピングすること、束ねることなどの多様な操作Oにより、ブロック表現は生成される。グルーピングにしろ、束ねるにしろ、数えることが基本操作であるから、ここではそれら多様な生成操作を一括して数えると呼ぶ。すなわち、ブロック表現法は$R_{\text{ブ}}$(ブロック;数える)と規定できる。

十進位取記数法$R_{\text{キ}}$では、数字が表現自体Sであり、計算（ここでは特に加減法）が数字の生成操作Oに相当する。すなわち、10＋2＝12という操作は、数字から数字を生成する操作である。そこで、十進位取記数法を$R_{\text{キ}}$（数字；計算）と規定する。

規定の仕方から明らかなように、表現法の議論では、例えば、ブロックを束で動かす操作と、1個1個数える操作等の区別は捨象する。捨象して論議しようとするのは、異なる表現法間の関係である。その関係は、次の「翻訳」で記述する。

翻訳とは「異種の表現法間の表現のやり取り」を指す。例えば、前記のブロック表現法$R_{\text{ブ}}$のブロック表現例（12のブロック）は、十進位取記数法$R_{\text{キ}}$での表現例12（数字）と翻訳関係がある。翻訳の方向は➡で表す。ブロックと数字の場合、表現自体は相互翻訳可能である。



表現系とは上記のように「表現に翻訳（➡）関係を備えた複数の表現法の集合」を指す。上記の例の場合、

$R_{\text{ブ}}$(ブロック；数える)⟺$R_{\text{キ}}$(数字；計算)

と記す。

意味とは「表現が（数学的に適切に）連鎖する場合、その表現の連鎖そのもの」を指す。表現の連鎖の仕方から、その意味には次の2つの場合がある。

ア．手続き的意味

特定の表現法内で表現が連鎖する場合である。十進位取記数法$R_{\text{キ}}$での表現の連鎖には、次のような例がある。

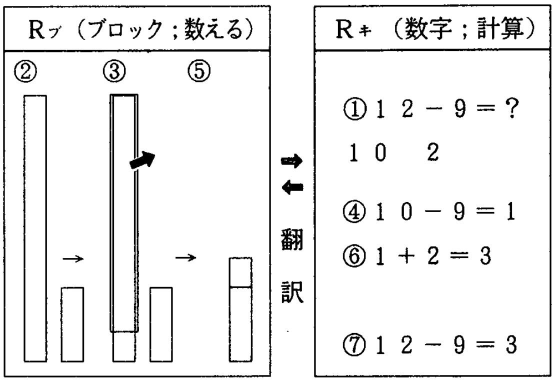
12－9＝？　　　　10－9＝1
10＋2　　　　　　2＋1＝3

この計算は、「2から9ひけないから、12を10と2に分けて、10から9ひいて1で、2と1

たして３」というような手続的な説明に対応するもので、その説明を計算の手続的意味と考えるのである。

イ．概念的意味

表現法間の相互翻訳を通して、表現が連鎖する場合である。下図の番号順の表現の連鎖がそれにあたる。



正確には、より細かなブロック表現に分けられよう。この連鎖は、ブロックに翻訳することにより、具体的なブロック操作へ置き換えて、計算の意味を説明した表現の連鎖とみなすことができる。

表現世界Ｗとは、「数学化過程の前後に現れる表現法または表現系」を指す。

小学校１年の入学時の場合、教科書の上では、数字は未導入であり、まず、ブロックを数えることができるようにする。後で、再考するが、ここでは、その段階の表現世界Ｗを、

$W_{ァ}=R_{ァ}$（ブロック；数える）

と仮にする。小学校１、２年の学習を経て、十進位取記数法の加、減、乗法等まで進めば、その段階での表現世界は、数字の計算でもできれば、ブロックを用いても説明もできる世界であるから、$W_{ァ}=$［$R_{ァ}$（ブロック；数える）$\Leftrightarrow$ $R_{キ}$（数字；計算）］と仮にしよう。

仮にこのように考えれば、数学化過程における表現の再構成とは、ブロックを数えることを基本とした旧表現世界$W_{ァ}$から、数字の計算を基本とする新表現世界$W_{キ}$への再構成として考えることができる。

以上の枠組みは表現を大局的に識別する。すなわち、数学化過程は表現法の差異により識別される。表現が連鎖した場合にのみ意味の論議ができる。個々の表現の差異や個々の表現の意味を取り上げるものではない。個々の意味は、基本的には認知過程抜きに分析できないが、それはinformalな表現の分析を必要とする。この枠組みは、あくまで教材レベルでの分析に利用するもので、個別的な表現を取り上げるものではない。

Ⅱ　表現の再構成過程

教科書内容及び授業参観での経験を、前出論文の表現の再構成過程のモデルにより分析することから、ブロックから十進位取記数法への表現の再構成過程には、次の様な層を認めることができる。

Ⅰ．数学化の対象

ブロックによる旧表現世界Ｗは実際には先に示した$W_{ァ}$ほど単純な世界ではない。ブロックの属性は、多様である。例えば、ブロックは、積み木としてタワーを作る材料であり、時にはカラフルな色をした玩具であり、大きさ等も表わす道具である。数える道具、数を表現する半具体物としてのブロックは、教師側が一方的に期待する表現法に過ぎない。すなわち、ブロックが表現しえるものは$R_{ァ}$の表現以外に多様に存在する。いうなれば、旧表現世界Ｗは、次の様にブロックによる多様な表現法を含む。

旧表現世界Ｗ

・$R_{ァ}$（ブロック；数える）；数える対象
・物を作る材料としてのブロック
・色分けする対象としてのブロック
・大きさを表わす道具としてのブロック
その他のブロックを使って児童がする表現法

Ⅱ．数学化過程；表現世界の再構成過程

多様な表現世界を含んだ旧表現世界Ｗから十進位取記数法表現を構築する以下の過程である。

Ⅱ－１．新表現記号の導入

新表現記号は数字である。現状では小１で数字を導入する以前に、児童は数詞を知っている場合が多く、限られた数範囲なら数えられる。すなわち、$R_{ァ}$（ブロック；数える）の存在が仮定できよう。そこで数字は、ブロックを数えた（数詞）結果を記録する役割を担って導入される。

注意すべきは、数字の導入でブロック配列も

決まることである。すなわち、数字の導入以前にはブロックは何個列ねても問題にならない。ところが、数字の表記が導入されれば、すなわち十進位取記数法が導入された時点で、ブロックは十個以上直線的に列ねることは認められなくなっていく。例えば、十二個のブロックは十個と二個に分ける必要が起る。ブロック表現に規約ができるのである。

旧表現世界W
多様な表現法
$R_{ア}$（ブロック；数える）⟺ 数字

Ⅱ－2．旧表現世界W内での特定表現法への焦点化

数字の計算法（成生操作O）の探求過程で旧表現世界Wは$R_{ア}$に焦点化されていく。すなわち、4＋3＝7がブロックを数えることから導入される以前に、ブロックは数えるもの、塊りで処理するものというような規約が作られていく。例えば7はいくつといくつか、いろいろなタイプの塊りの組合わせが作られる。それが、4＋3＝7という計算の素地となる。このような素地作りにより、多様な表現法の中から、$R_{ア}$（ブロック；数える）への焦点化が進む。すなわち、ブロックは数える対象になる。

旧表現世界W
多様な表現法
$R_{ア}$（ブロック；数える）⟺ 数字
↓　　　　　　　　　　　↓
Ⅱ－2 ↓ ←←←←　　←計算法の素地
↓
$R_{ア}$（ブロック；数える）

Ⅱ－3．焦点化された表現法から新表現法の構成

$R_{ア}$の翻訳から、数字の算法（生成操作）を特定していく。この過程はⅡ－2と相互進行的である。例えば、三口の加法の学習後、9＋7の解を求めるのには、加数分解や被加数分解といったブロック操作を行なう。そのブロック操作を翻訳して、加法の計算法が構成される。

旧表現世界W
$R_{ア}$（ブロック；数える）⟺ $R_{キ}$（数字；計算？）
↓
$R_{キ}$（数字；計算）

Ⅱ－4．新表現世界W'の完成

数範囲、計算の種類の増大や範囲の拡張等の繰返し、すなわちⅡ－2、Ⅱ－3の繰返しから、$R_{キ}$（数字；計算）及び$R_{ア}$（ブロック；数える）⟺ $R_{キ}$（数字；計算）が構成されていく。$R_{キ}$の構成には計算アルゴリズム（暗算による筆算）を充実し、$R_{ア}$に対する$R_{キ}$の卓越性を確認する必要がある。すなわち、いつまでブロックを数えて答を出すのではなく、筆算及び暗算を含んだ計算で答えを出した方が、また、答えを出せた方が、ずっと早くて便利であることを確認し、筆算及びそれに不可欠な暗算ができるようにしていくのである。そして、最終的に小2レベルでの次の表現世界が完成していく。

新表現世界W'＝〔$R_{ア}$ ⟺ $R_{キ}$〕

Ⅲ．数学化の結果

新世界W'で計算アルゴリズムの進化やさらなる数範囲の拡張など進める。

二年間の学習指導の過程で、以上の過程は、数範囲の拡張や算法の種類の増大を通して何度も繰返される。

この表現の再構成過程では、次の様な数字の意味の変容が認められる。

Ⅱ－1での数字の意味

ここで数字は、ブロックの個数や操作個数を記録する意味しか持たない。これは表現の翻訳ではあるが、十進位取記数法$R_{キ}$は存在しないので表現法間の翻訳ではない。すなわち、個数を記録する数字は、ブロック表現法$R_{ア}$内において個数を記録する手続的な意味を担う。

Ⅱ－3の数字の意味

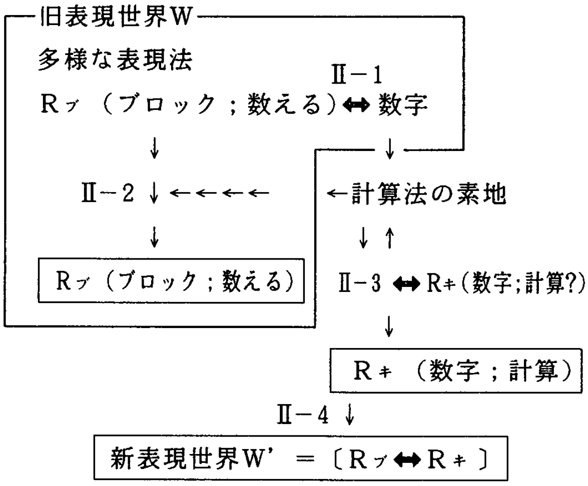
ここでは、ブロックなしでの数字計算は未確立である。ただし、ブロック操作を翻訳しながら、数字の計算をすることはできる。すなわち、ブロック表現法$R_{ア}$から十進位取記数法$R_{キ}$へと翻訳することにより計算の意味を理解することはできる。それゆえ、数字及び数字の計算は、概念的な意味を有すると言える。

Ⅱ－４の数字の意味

ここでは、ブロックを利用せずに数字計算ができるから$R_{キ}$における手続的な意味を有すると言える。同時に$R_{ア}$からの翻訳で意味を説明することができるから、数字及びその計算は概念的な意味を有する。

特に、数学化の過程Ⅱにおける表現世界の再構成過程を、一つの図式にまとめると、次の流れ図になる。

以上の表現世界の再構成過程や意味の発達段階は、前出論文の枠組みを適用して得たものであるから、実際にそうかどうかは検証を要する。ただし、以上の過程は教材分析から得ているので、教材レベルでの議論には支障をきたさない。



Ⅲ．学習指導の問題点

前章の考察結果に、前出論文で得た表現の学習指導原理を適用し、この場合の学習指導原理を提示するとともに、疑問の多い学習指導例を取り上げ、その指導に潜む問題点を指摘する。

前出論文で指摘したように、表現の再構成過程には多様な学習障害が認められる。以下に示す表現の指導原理は、その障害に対して、モデルの各局面から予想される指導の在り方を示したものである。

原理１（局面Ⅱ－１から）

数字は、児童の表現世界で意味をもち、それまでの世界から翻訳できる形式で導入される必要がある。

あたりまえに思える原理であるが、授業参観すると、わからせたいという意識が前面に出た教師主導型の授業展開が多く、この原理は守られていないように思える。例えば、我々にとっては、十二個のブロックを十個と二個に分けるのはあたりまえである。しかし、初学の児童にとっては、直線的に十二個つなげる方が自然であり、十と二に分けることはむしろ不自然である。分ける必然性はどこにあるのであろう。教師にとってあたりまえの知識は、児童にとっては理解し難いのが普通である。

ブロックのかわりにタイルを利用した指導の中には、五個になったら五の棒タイル、十個になったら十の棒タイルに換えなさいと単純に教え込むことで、その障害を乗り越えようとする指導もあるようだ。換えなければならないという児童にとっての必然性は、パットみて個数が数えられる視認性より、むしろ指折り数えるという児童の行為にある。とすれば、指折り数えるという行為ができない児童には、タイル表現は意味をなさないことになる。さらに、指で数えることができても、タイルで数えることができるであろうか。そこには異種表現法間の翻訳の問題が潜んでいる。児童の表現世界で意味ある形でというのは、あたりまえのようで、実際には容易なことではない。この場合、タイル表現は指折り数えることとは切っても切り離せない行為ともなる。タイルを利用した指導の中にはそれを禁じる指導さえあるようだが、認知心理学者の指摘を待つまでもなく[4)]、そのような指導法に疑問が噴出するのも不思議でない。

このように児童の表現世界の確認抜きには、数字を意味ある形で導入することは難しい。確認を怠れば、そこでの学習は、理解できない一方的な暗記の強要になりかねないのである。

原理２（局面Ⅱ－２から）

数字計算の素地指導過程で、児童自身は数字計算を説明するブロック表現法に着目する必要がある。ブロック表現法がなければ構成する必要がある。

タイルを使えば「わかる」とする指導がある。そのような議論に接すると、その「わかる」は「わからせる」という信念に聞えることも少なくない。J.Piajet の主張を今日的立場から教

育へ持ち込もうとする構成主義者等の見解に仮に従えば、認知構造の全く異なる児童と大人は同じ考えを持つことは在り得ない。構成主義者等によれば、児童は、自分自身で自分の知識を構成する存在である[5)]。児童は、自分自身の持てる知識と外界との相互作用により、自分の知識を構成していくことで主体的にわかるのである。構成主義者等が研究に取り組む小学校低学年では、大人の考えを「わからせる」ための指導法自身がすでに議論の外に置かれている。

自分の知識をわからせることに専念する指導では、児童のブロック表現世界は、ブロックを数える表現法であると勘違いすることが多い。そこで児童がしているブロック操作と、教師が期待する操作と同じという保証はどこにあるのであろう。先に指摘したように、児童にとって、ブロック表現は多様な意味を持ち得る。教師から見ればブロックを数える児童が、数えながら、何か別の行為をしているかも知れないのである。

この原理で主張する素地指導とはそれを保証する為に行なわれる指導である。その指導は、ブロックを塊り単位で操作する指導から十進位取記数法に合せてブロックを操作する指導までを含んでいる。実際には、児童がそのような操作に慣れるのも容易なことではない。ブロックは塊りで操作するより、一個一個数える方が簡単である。それに対して、数字計算は、マージャンパイのような塊り操作と翻訳関係にある。一個一個数えながら、塊り単位で考えるのは容易ではない。一個一個操作する考え方のままでは、数字計算を説明するブロック表現法には至らないのである。

時任さよは、寄せる場合は「両手を合せる動作」、取り去る場合は「平泳ぎのように両手で分ける動作」を指導する必要を指摘している[6)]。このような動作こそが、塊りでブロックを操作する上での基本である。

半具体物としてのタイル操作は、児童の発達に見合う、だからタイルというような議論がある。その論拠が、J.Piaget の指摘する具体的操作段階であるから程度であるとすれば、それは算数科の学習指導の議論としては脆弱である。例えば、五の棒タイルの活用を非常に重視する論拠はなんだろう。筆者は、そこで言う発達の論拠は何かを、実践する方に伺ったことがあるが、そう指導したら、わからせることができた以外の根拠を得ることはできなかった。そういった実践以外の場合はどうかという問いに対しては、それ以外の指導法の実践経験がないのでわからないというものであった。

筆者の知る限りでは、この段階での学習による発達を論じた国内の研究は、最近では志水廣による研究[7)]のみである。その研究では、繰り上がりのある足し算では五の棒タイルを活用した児童の表現（５－２進法）は認められていない。すなわち、児童の発達に五の棒タイルという考えは、教えない限り現れないというのが、その研究の結論の一つである。

加えて、前記のような塊りによる操作は五の棒タイルという特定の塊りを指すものではない。その場面に応じて、より適切なグルーピング単位を探すのが、児童に課せられた課題である。その塊りの中でも特に数範囲を拡張する過程で特別に重要になるのは、十進位取記数法に直結する10単位の塊りのみではあるまいか。

五タイルを引きずっていくことがおかしな理由は、次の原理を参照すれば、より明瞭になる。

原理３（局面Ⅱ－３より）

十進位取記数法は、子供が数字の計算法を探求する過程で、着目したブロック表現法から翻訳することによって構成されるべきである。

この翻訳は、適切なブロック表現法がすでに児童の中にあり、それにのみ着目できることを前提にしている。これまでの議論から明らかなように、それは容易いことではない。

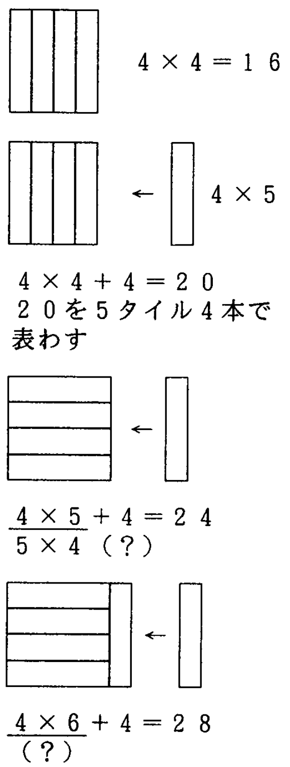
ほとんどの児童がタイルを一個一個数えて答えを出しているのに、教師はそれとは離れた自分の考えをタイルで説明した授業を何度かみたことがある。このような授業では何のためにタイルを利用しているのであろうか。結果論として言えば、児童の考えを生かし、本習事項につなげていくために利用したのではない。そこで教師は、自分のやり方を教え込むためにタイルを利用したのである。そこで児童は、１個１個数える自分の考えと教師の考えの対比さえできないから、教師のやり方は理解できない方が自

然である。このような結果になるのは、原理２で指摘した適切な表現法ができていないか、そこに焦点化されていないためと言える。ブロックから十進位取記数法への翻訳は、そのブロック表現法が記数法の構造と一致しているときのみ可能である。このようにズレた状況では、児童は教師のやり方がわからぬままに、こうすればいいんだと憶える以外ない。

３年になると記数法に結びつく乗法の場合、２年の九九構成で、タイル表現、特に五タイルと数字の計算とがズレる典型的な指導に出会う。

「タイヤ４本の自動車が○台」という場面をもとに、４の段の九九を構成していく指導がある。まず、４×４まで調べて、４ずつ増えることを予想し、４×５まで学ぶ。ここまでは通常の展開である。ところが、ここで「五の棒タイルに変身」と称して、五の棒タイルが出てくる。

授業者によれば、習慣とのことだが、五の棒タイルを利用すべき必然性はいったいどこにあるのであろう。１台あたりのタイヤ本数から、４の塊りの幾つ分を考えていたのに、突然５の塊りの幾つ分が入ってきて、その後また４の塊りが取り上げられていく。４の段で４の累加のよる九九の構成に、突然５×４が入ってきたように読める。そこでは、タイル操作と、計算の仕方が対応していないのである。



この場合、４×５で表現を換えた理由は、20といくつと数えやすくするためかとも察せられる。しかし、反省会での周囲の意見に授業者からの、その表現のよさに関する反論はなかった。そして、この解釈も、自動車の場面と、そこでのタイル操作が対応しないことから成立たないことから、やはりおかしいことが明確になる。

縦のタイル表現は、１台あたりのタイヤ本数に対応している。車が１台増えるごとに、４本増えるならば、車の場面とタイル操作は対応している。しかし、４×５での横の五タイル４本は、いったい何に対応するのであろう。対応するものが仮にあるとすれば、５台の車の前輪左、前輪右、後輪左、後輪右という４種のタイヤ配置である。車１台増えるというアイデアとタイヤ配置の関係を考えようとすれば、わからなくなる。

この授業は、児童に対して自動車の場面を考察するという必然性の基に導入されているにもかかわらず、なぜそのような混乱をきたす五タイル表現を導入するのであろう。この授業では、自動車の台数とタイヤの本数を考えている普通の児童は、わからないほうが自然である。結論から言えば、この授業では、方便として、身近な事象と称して自動車を取上げたに過ぎない。この扱いでは、計算の仕方を説明できないばかりでなく、事象を数理的に処理する能力が育だつとは思えない。

このようにブロック表現法から記数法を翻訳するには、相互の表現操作が翻訳できる関係になっていることを確認する必要があると言える。

原理４（局面Ⅱ－４より）

十進位取記数法を中心とした世界を確定する為に、児童が、十進位取記数法のよさを知り、十進位取記数法をそれまでのブロック表現法に適用できるようにすべきである。

十進位取記数法のよさは、桁数の小さい場合は暗算により、桁数の大きい場合は筆算により強く感じられる。ブロックを数えるより、筆算や暗算の方が飛躍的に簡単であり、適用可能性も高いということがそのよさである。そのためには筆算や暗算、ブロック問題の計算による解決などに必要な多くの技能に習熟する必要がある。特に筆算アルゴリズムを遂行するには限定された数範囲での暗算が不可欠である。その訓練は、ブロック操作でするのではなく、計算練習、暗算、筆算練習などによるというのが筆者の考えである。

それに対して、タイルの操作が内面化されて、自然に暗算できるようになるというような議論を耳にすることがある。具体物→反具体物→シ

エーマというような、操作の内面化図式で、筆算がわかる、できるというような考え方は、今日的には飛躍のある議論である。操作が内面化して数字計算ができるという説明は、プロの将棋師のように、タイルが念頭イメージで動く状況を指すと言えよう。それに対して、数字計算を確立した児童の場合、計算とはまったく手続的であり、どうやって答えを出したかと思う間もなく答が出る方が普通である。タイルのようなイメージは、改めて「なぜ」と問われて出てくる概念的知識であるからである。

操作の内面化図式による考え方にはシエーマからどう暗算ができるようになるかという肝心な議論を抜いている。そこには、計算手続きとブロック操作から得る概念との混同がある。無論、教師の側からみれば、そう教えてできるようになったというような議論もあろう。しかし、その図式で強調されているのは原理３の翻訳過程であり、原理４のめざす知識ではない。なぜなら、原理３で獲得された十進位取記数法と原理４で完成される十進位取記数法は同じ構造ではないからである。

実際[8)]、右の二題の筆算アルゴリズムは、十進位取記数法として、「くりあがり」という用語で表せば、同じ手続きである。ところが、ブロック表現法では、ケタがずれることで全く異なる表現のブロックによる操作が遂行される。二題の筆算を同じ計算と考えることができるのは、計算に際してブロックをイメージしていないからである。ブロックを念頭操作して解を出す児童は、この二題が同じ計算とは思えないのである。筆算の手続的知識と筆算を説明するブロックによる概念的知識は明らかに異なる性格を備えた知識である。その混同が、操作の内面化図式の過度の強調という誤解を生んでいるのではないだろうか。

$$\begin{array}{r} 456 \\ +789 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4560 \\ +7890 \\ \hline \end{array}$$

結　び

本稿では、ブロックから十進位取記数法による表現がどのように導入され、構築されていくか、そしてその表現の意味を変容させていくかを記述することにより、学習指導において予想される児童の変容過程を示し、十進位取記数法の表現指導の在り方を原理として提起した。特に在り方提起では、筆者が参観した中から疑問に思われた指導を取上げることに努めた。

取上げた指導例は、算数の授業研究を深める先生方からみれば、今どきこのような授業が？と評される水準にあるかもしれない。しかし、筆者の参観経験の中では、そのような授業が目立つのも実際である。以下、その点に警笛をならす意味で、筆者の記述動機を指摘しておく。

よく指摘されるように、日本の算数の学習指導研究は、世界第一級の水準にある。そのため国際会議等では日本の学習指導はしばしば話題にのぼる。ある会議の席で、外国の研究者は日本の学習指導が「問題解決的で」すばらしい授業であると絶賛したという。ところが、その発言に対して、別の外国の研究者は、いや私は日本でそんな授業を目にしなかった。日本の授業は典型的な教え込み型だと否定したという。

最近、十年程前に行なわれた国際数学教育調査の国際比較結果が明らかになった[9)]。驚くべきことに、日本の児童（中１の生徒調査）は算数嫌い世界一であり、算数を難しいと思う程度も世界一であるという。問題解決型授業の結果か、それとも教え込み型授業の結果かどちらであろうか。無論、安易な二者択一的議論は不毛であろう。しかし、私の接する範囲では、算数の授業研究者が少数なためか、教え込み型授業ばかりによく出会う。

教師の一方的な教え込みは、児童が自分の考えと教え込まれる手続きとの関係を自分なりに構成する機会を奪うものである[10)]。児童が自分の考えと教師の発言を対照して理解していくことができなければ、児童は自分の考えをもつことができないので、教師の指示以外の行動はできなくなっていく。教え込みが繰返されるほど児童はわからなくなっていくという悪循環が、そにある。そのような指導では、後に考える手立てとなっていくはずの考え方の素地指導は失われている。素地という考えは、その知識を獲得した大人の立場からでは意識されにくいためである。実際、授業反省会等で、授業の目標の外にある素地指導についての議論に接する機会が少ない。実際そう指導するかどうかは別にしても、そのことを記した教師用指導書さ

え読まれていない場合もある。

考え方の素地が培われていなければ、児童の自力解決は望めない。自力解決ができなければ、練り上げるべきアイデアが児童から得られない。そうなれば、教師は益々教え込みに迫られる。この悪循環に浸れば、児童はいつも未習事項の暗記を迫られ、わからなくなり、嫌いになると言える。

自分(大人)の知識を、相手に教え込むこと、わからせようとすることは、教える側には、勉強する必要がなく容易であろう。また、教え込む努力を進める授業はその知識を持つ人からみれば、「わかりやすくする工夫や努力」に映るだろう。授業参観によく算数が取り上げられるのは、そのためだとも聞く。しかし、再三述べたように未習の児童がわかる保証は、いったいどこにあるのだろう。「わかりやすく」と発する授業者が、自分のわかり方（多くの場合やり方）を教え込むことに専念している姿に出会うことも少なくない。わかる教え方の声だかの強弁の中に、その根拠となるべき児童の実際の考えが見えてこないのは私だけであろうか。本論の筆者の研究意図は、Ⅰ、Ⅱ章での先の論文のケーススダディにあった。しかし、その執筆意図は、Ⅲ章で、このような児童の考え方を知り、活かす必要を提起する事にあった。

[注及び参考文献]

1）三輪辰郎退官記念論文集の一稿として出版される（1991予定)。日本数学教育学会第23回数学教育論文発表会論文集「数学における言語の再構成過程に関する一考察～数学的表現からみた分割数の授業の分析Ⅱ～」(1990)で、その一部は報告した。

2）筆者のこれまでの研究は、拙稿「数学化の立場からの学習指導に関する事例的研究～分割数の授業分析～」日本数学教育学会誌第72巻第9号（1990）の文献欄を参照されたい。

3）例えば、学会誌第72巻第9号のp44を参照されたい。

4）数教協（民間教育研究団体）では数えることを基本とした戦前以来の指導を「数え主義」と称して否定している。算数教育に携わる教師及び研究者の間では、数教協の指導法（水道方式）は逆に疑問が投げかけられている。認知心理学の佐伯胖も、同様に疑問視して「認知心理学の研究の方では、カウンティグこそがむしろ非常に大切だ……数教協の場合は単純に禁止するんです。数えてはいけないというふうに。……その点ちょっとねえ、イマイチなんです（『すぐれた授業とは何か』東京大学出版会)」と指摘している。ただし、本稿で批判する授業例は、必ずしもそこで提案される一律摸倣追試型の指導法ではなく、いろいろな指導法を折衷して構想された実践である場合が多い。

5）カミイ「幼児の数の指導」チャイルド社
カミイ「子どもと新しい算数」北大路書房

6）平岡忠編「操作的活動を生かした授業』明治図書

7）志水廣「繰り上がりのあるたし算では、なぜ、加数分解を行なうのか」日本数学教育学会誌69巻12号

8）A.H.Schoenfeld“On Having and Using Geometric Knowledge”‘Conceptual and Procedual Knowledge:The Case of Mathematics’ 1986 L.E.A.Pub.

9）K.J.Travers & I.Westbury ‘The IEA Study of Mathematics Ⅰ,Ⅱ’Pergamon Press
Ⅱのp205参照。1990年9月の北数教旭川大会にて、日本側代表沢田利夫氏（国立教育研究所）がその概要を講演された。

10）本稿での教材分析及び授業分析の視点は、新潟大学の金子忠雄氏に啓発された点がおおきい。同氏は1990年11月砂川小学校で講演された。

（本分校　数学教育研究室）